



TITLE:

Totally Real Parallel Submanifolds in $SP^n(C)$ (Differential Geometry of Submanifolds)

AUTHOR(S):

内藤, 博夫

CITATION:

内藤, 博夫. Totally Real Parallel Submanifolds in $SP^n(C)$ (Differential Geometry of Submanifolds). 数理解析研究所講究録 1980, 408: 46-59

ISSUE DATE:

1980-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/102379>

RIGHT:

Totally real parallel submanifolds in $P^n(C)$

山口大 理 内藤博夫

Riemannian manifold M から Riemannian manifold \bar{M} への isometric immersion f が parallel であるとは、 f の second fundamental form σ_f が次の式を満たす時に言う：

$$(*) \quad D_X(\sigma_f(Y, Z)) = \sigma_f(\nabla_X Y, Z) + \sigma_f(Y, \nabla_X Z).$$

ここで、 D は normal connection、 ∇ は M の riemannian connection、 X, Y, Z は M 上の C^∞ vector fields とする。さて ambient space \bar{M} が symmetric space の時、parallel isometric immersion f を許す Riemannian manifold M は locally symmetric space になる事が知られている。

それゆえ次の問題が考えられる。

問題 1 \bar{M} が symmetric space の時、単連結 symmetric space M とそれから \bar{M} への parallel isometric immersion f の組 (M, f) を決めよ。

これに関して、 \bar{M} が real space form の時、Ferus [3] と Takeuchi [11] によって、 \bar{M} が正則断面曲率一定の Kähler metric を持つ complex projective space の時、 M が Kähler submanifold という条件の下で、Nakagawa-Takagi [4] によって完全に決定された。しかし \bar{M} が他

の場合については知られていないように思われる。ここで注意すべき事は、知られている *parallel isometric immersions* は全て 'equivariant', である事である。従って次の問題も合わせて考えられる。

問題 2 f が単連結 *symmetric space* から *symmetric space* への *parallel isometric immersion* ならば、 f は 'equivariant', か。

以下の章で、ambient space \bar{M} が正則断面曲率 $C > 0$ の Kähler metric を持つ complex projective space $P^n(C)$ の時、 M^n が n -dim simply connected *symmetric space*, f が *totally real parallel isometric immersion* という条件の下で上の二つの問題を考える。

§ 1. $P^n(C)$ への *totally real parallel isometric immersions*

J を $P^n(C)$ の complex structure とする。この時、Riemannian manifold M から $P^n(C)$ への *isometric immersion* f が totally real とは $\forall p \in M$ に対して、 $T_p(M)$ と $JT_p(M)$ が *orthogonal subspaces* の時にいう。 $p \in M$ に対して、subspace $N_p^1(M)$ を $\{\sigma_f(X, Y); X, Y \in T_p(M)\}$ の \mathbb{R} -span とし、 $O_p^1(M) = T_p(M) \oplus N_p^1(M)$ を p の 1st osculating space とする。この時、

Prop. 1.1 ([5]). $f: M \rightarrow P^n(C)$ *parallel isometric immersion* \implies
 (1) *complete totally geodesic submanifold* $N \subset P^n(C)$ が一意に存在して、 $f(M) \subset N$ で $\forall p \in M$ に対して $O_p^1(M) = T_p(N)$ となる。

(2) (M, f) について次の3つの場合が起こる:

- (a) f が Kähler immersion で、 $N = P^r(\mathbb{C})$.
 (b) f が totally real immersion で、 $N = P^r(\mathbb{R})$ ($P^r(\mathbb{R})$ は断面曲率 $c/4$ を持つ).
 (c) f が totally real immersion で、 $N = P^r(\mathbb{C})$.

ここで (a) については [4] で知られ、(b) については covering sphere $S^r(c/4)$ への parallel immersion によって導かれる事が分かる。我々の考える対象 $f: M^n \rightarrow P^n(\mathbb{C})$: totally real parallel isometric immersion は、totally geodesic immersion を除いて (c) の特別な場合である事に注意する。以下、 M^n を単連結 symmetric space, $f: M^n \rightarrow P^n(\mathbb{C})$ を totally real parallel isometric immersion とし、 R を M^n の curvature tensor, \bar{R} を $P^n(\mathbb{C})$ のそれとする。

$0 \in M$ を fix し、 $\mathcal{P} = T_0(M)$, $\mathcal{R} = \{R_0(X, Y); X, Y \in \mathcal{P}\}_{\text{gen.}} \subset \mathcal{SO}(\mathcal{P})$, $\mathcal{Q} = \mathcal{R} + \mathcal{P}$ とし、 \mathcal{Q} 上の Lie bracket $[\cdot, \cdot]$ を次のように定義する:

$$[T, S] = T \circ S - S \circ T, [T, X] = -[X, T] = T(X), [X, Y] = -R_0(X, Y)$$

$$(T, S \in \mathcal{R}, X, Y \in \mathcal{P}).$$

同様に、symmetric space $P^n(\mathbb{C})$ に対しても、 $\bar{\mathcal{O}}, \bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{R}}, \bar{\mathcal{Q}}$ を定義する。さらに \mathcal{P} 上の \mathcal{P} -valued bilinear form $\tilde{\sigma}_f$ を $\tilde{\sigma}_f(X, Y) = J\sigma_f(X, Y)$ で定義する。この時、

Lemma 1.2 ([6]). $f: M^n \rightarrow P^n(\mathbb{C})$ totally real parallel ならば、

- (1) $\tilde{\sigma}_f$ は 3 次の symmetric trilinear form (metric による $\mathcal{P}^* \otimes \mathcal{P}^* \otimes \mathcal{P}$ と $\mathcal{P}^* \otimes \mathcal{P}^* \otimes \mathcal{P}^*$ の同一視の下で)。

$$(2) \quad \bar{K} \cdot \tilde{\sigma}_f = 0, \text{ i.e., } T(\tilde{\sigma}_f(X, Y)) = \tilde{\sigma}_f(T(X), Y) + \tilde{\sigma}_f(X, T(Y)).$$

$$(3) \quad \frac{c}{4} \{ \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y \} = R_0(X, Y)Z - [\tilde{\sigma}_f(X), \tilde{\sigma}_f(Y)](Z) \quad (\text{ここで、} \tilde{\sigma}_f(X): \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \text{ は } \tilde{\sigma}_f(X)(Y) = \tilde{\sigma}_f(X, Y) \text{ によって定義する}).$$

証明 (1)は totally real という事と $\mathcal{P}^n(\mathbb{C})$ の riemannian connection $\bar{\nabla}$ が $\bar{\nabla}J \equiv 0$ である事によって簡単に得られる。さらに、0 での normal space が $JT_0(M)$ で与えられる事に注意すれば、

$$\nabla_X Y = -JD_X JY \quad (X, Y; \text{vector fields on } M)$$

を得、それゆえ (*) によって $\nabla \tilde{\sigma}_f \equiv 0$, ゆえに (2) を得る。さて

(3) は totally real により $\bar{R}_0(X, Y)Z = \frac{c}{4} \{ \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y \}$ である事に注意すれば、Gauss の式の直接の結果である。

Q.E.D

§.2 Rigidity classes とその関係

先づ、問題 1 を厳密にする。 $I(M^n)$ を M^n の isometries 全体のなす Lie 群、 H を $\mathcal{P}^n(\mathbb{C})$ の holomorphic isometries 全体のなす Lie 群とする。
 $\mathcal{T}_M = \{ f: M^n \rightarrow \mathcal{P}^n(\mathbb{C}); \text{totally real parallel isometric immersion} \}$ とおき、
 作用: $H \times I(M) \times \mathcal{T}_M \ni (\bar{g}, g, f) \longrightarrow \bar{g} \circ f \circ g^{-1} \in \mathcal{T}_M$ に関する orbits 全体を $\bar{\mathcal{T}}_M$ とする。さらに、 $\mathcal{S}_M = \{ N \subset \mathcal{P}^n(\mathbb{C}); \text{complete totally real parallel submanifold でその universal riemannian covering が } M^n \}$ とおき、作用: $H \times \mathcal{S}_M \ni (\bar{g}, N) \longrightarrow \bar{g}(N) \in \mathcal{S}_M$ に関する orbits 全体を $\bar{\mathcal{S}}_M$ とする。従って、問題 1 は $\bar{\mathcal{T}}_M, \bar{\mathcal{S}}_M$ を調べる事である。

Lemma 1.2 を考える事によって、集合 $\Pi_M = \{ \tilde{\sigma}; P \text{ 上の } P\text{-valued bilinear form} \}$ で Lemma 1.2 の (1), (2), (3) を満たす $\tilde{\sigma}$ を考える。 $F_0(M) = \{ g \in I(M); g(0) = 0 \}$ とおき、作用: $F_0(M) \times \Pi_M \ni (k, \tilde{\sigma}) \rightarrow k \cdot \tilde{\sigma} \in \Pi_M$ ($(k \cdot \tilde{\sigma})(X, Y) = (k_*)_0(\tilde{\sigma}(k_*^{-1}(X), k_*^{-1}(Y)))$) に関する orbits 全体を Π_M とする。この時、 $\bar{g} \in H, g \in I(M), f \in \mathcal{T}_M$ に対して $(\tilde{\sigma}_{\bar{g} \cdot f \cdot g^{-1}})_0 = (\tilde{\sigma}_{f \cdot g^{-1}})_0 = k \cdot (\tilde{\sigma}_f)_0$ ($\exists k \in F_0(M); g \in F_0(M)$ ならば g 自身を取ればよい) である事に注意すれば、

$$\iota_M : \bar{\mathcal{T}}_M \ni [f] \longrightarrow [(\tilde{\sigma}_f)_0] \in \Pi_M$$

が定義される。さらに $f \in \mathcal{T}_M$ に対して $f(M)$ が $P^n(C)$ の submanifold (これは後にふれる) であれば、

$$j_M : \bar{\mathcal{T}}_M \ni [f] \longrightarrow [f(M)] \in \bar{\mathcal{S}}_M$$

が定義される。この時、次の定理を得る。

定理 2.1 ([6]) (a) ι_M は bijective である。(b) j_M は bijective である。

ここで $\bar{\mathcal{T}}_M, \bar{\mathcal{S}}_M$ の研究はある P 上の 3 次の cubic forms の同値類の集合 Π_M の研究に置き換えられたのだが、 $\bar{\mathcal{T}}_M, \bar{\mathcal{S}}_M$ を直接調べる方法については [7] を参照せよ。しかし、ここで述べる方法は問題 1 を $P^n(C)$ に限らず一般の symmetric space で考える時に役立つかもしれない。定理 2.1 (a) の証明は次の 2 つの章で与えられ、(b) については (a) と同じ議論を使うので省略する。

§.3. Frenet curves と一意性

この章では ι_M が injective である事を説明する。Riemannian manifold \bar{M} の arc-length で parameterize された curve $C(t)$ ($t \in I$) が Frenet curve であるとは、自然数 r が存在して、高次の curvature positive functions $k_1(t), \dots, k_r(t)$ と Frenet orthonormal frame $\{V_1(t), \dots, V_r(t)\}$ が定義される時に言い、この時 Frenet formula:

$$\begin{cases} \dot{C}(t) = V_1(t) & , & (\bar{\nabla}_t V_1)(t) = k_1(t) V_2(t) \\ (\bar{\nabla}_t V_2)(t) = -k_1(t) V_1(t) + k_2(t) V_3(t) & , \dots , \\ (\bar{\nabla}_t V_j)(t) = -k_{j-1}(t) V_{j-1}(t) + k_j(t) V_{j+1}(t) & , \dots , \\ (\bar{\nabla}_t V_{r-1})(t) = -k_{r-2}(t) V_{r-2}(t) + k_{r-1}(t) V_r(t) & , (\bar{\nabla}_t V_r)(t) = -k_{r-1}(t) V_{r-1}(t) \end{cases}$$

を満たす。さらに f が Riemannian manifold M から Riemannian manifold \bar{M} への parallel isometric immersion の時、 M の arc-length は geodesic $\gamma(t)$ に対して、 $(f \circ \gamma)(t)$ は \bar{M} の Frenet curve であり、その curvature functions $k_j(t)$ は定値関数で、 $r, k_1, \dots, k_r, V_1(0), \dots, V_r(0)$ は $C(0) = P, \dot{C}(0) = X, (f_*)_p, (\sigma_f)_p$ だけで決まる (Strübing [10])。

Lemma 3.1 ([61]). M が complete riemannian manifold, \bar{M} が riemannian manifold, $f, g: M \rightarrow \bar{M}$ が parallel isometric immersions とする。この時、 $f(0) = g(0), f_{*0} = g_{*0}, (\sigma_f)_0 = (\sigma_g)_0$ とはる M の点 0 が存在すれば、 $f \equiv g$ である。

証明 $\gamma(t)$ を 0 を出発する M の arc-length は geodesic とする。この時、条件から上の注意によって2つの Frenet curves $(f \circ \gamma)(t),$

$(g \cdot r)(t)$ は同じ $r, k_1, \dots, k_{r-1}, V_1(0), \dots, V_r(0)$ をもつ。ここで Frenet formula を $\{C, V_1, \dots, V_r\}$ を変数とする常微分方程式の系とみれば、2つの Frenet formulas は同じ常微分方程式の系を与え、その解は同じ初期値を与える。ゆえに $(f \cdot r)(t) = (g \cdot r)(t)$ となり、 M の完備性によって $f = g$ となる。

Q.E.D

\mathcal{I}_M の injective の証明 $[f], [g] \in \bar{\mathcal{I}}_M$ が $[(\tilde{\sigma}_f)_*] = [(\tilde{\sigma}_g)_*] \in \bar{\pi}_M$ と仮定する。この時定理 2.1 の上の注意により適当な $k \in F_0(M)$ によって $(\tilde{\sigma}_f)_* = (\tilde{\sigma}_g)_*$ とできる。さらに \bar{p} の unitary frames は互いに共役 (順序をこめて) である事に注意すれば、適当な $\bar{g} \in H$ によって、 $f(0) = g(0)$, $f_* = g_*$ とできる。ここで再び定理 2.1 の上の注意より $(\tilde{\sigma}_f)_* = (\tilde{\sigma}_g)_*$ である事に注意すれば、Lemma 3.1 より $[f] = [g]$ を得る。

Q.E.D

Remark 上の議論は本質的に Lemma 3.1 に依るので、一般の symmetric space \bar{M} でも対応する命題を示すことができる。

§4. Equivariant map の構成

この章では \mathcal{I}_M が onto になる事、i.e., $\tilde{\sigma} \in \bar{\pi}_M$ から totally real parallel な equivariant map を構成する事を述べる。 $\Delta: \bar{p} \rightarrow \bar{p}$ を totally real Euclidean isometry とする。さらに injective homom.

$\tau_\Delta: \mathcal{K} \rightarrow \bar{\mathcal{K}}$ を $\tau_\Delta(T)(\Delta(X) + J\Delta(Y)) = \Delta(T(X)) + J\Delta(T(Y))$ によって, linear map $\mu_{\tilde{\sigma}, \Delta}: \mathcal{P} \rightarrow \bar{\mathcal{K}}$ を $\mu_{\tilde{\sigma}, \Delta}(X)(\Delta(Y) + J\Delta(Z)) = \Delta(\tilde{\sigma}(X, Z)) - J\Delta(\tilde{\sigma}(X, Y))$ によって定義する。ここで $\bar{\mathcal{K}} = \bar{U}(\bar{\mathcal{P}})$ である事に注意すれば $\tilde{\sigma}$ の条件(1)によって上の maps は定義可能である事が分かる。さらに、 $\rho_{\Delta, \tilde{\sigma}}: \mathcal{M} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}$ を $\rho_{\Delta, \tilde{\sigma}}(T+X) = \tau_\Delta(T) + \mu_{\tilde{\sigma}, \Delta}(X) + \Delta(X)$ ($T \in \mathcal{K}, X \in \mathcal{P}$) によって定義すれば、 $\tilde{\sigma}$ の条件(1), (2), (3) によって injective Lie homom. になる。さて M は単連結 symmetric space だから、単連結 Lie 群 G で M に transitive, isometrical に働き、Lie 環が \mathfrak{g} で、isotropy subgroup G_0 が連結でその Lie 環が \mathcal{K} となるものが存在する。同様に \bar{G}, \bar{G}_0 をとれば、 $\rho_{\Delta, \tilde{\sigma}}$ は $G \rightarrow \bar{G}$ を induce し、さらに equivariant map $f_{\Delta, \tilde{\sigma}}: M \rightarrow \mathcal{P}^n(\mathbb{C})$ を $f_{\Delta, \tilde{\sigma}}(g(0)) = (\rho_{\Delta, \tilde{\sigma}}(g))(\bar{0})$ によって induce する。ここで $(f_{\Delta, \tilde{\sigma}})_* = \Delta$ である事に注意すれば、 $f_{\Delta, \tilde{\sigma}}$ の equivariance によって、 $f_{\Delta, \tilde{\sigma}}$ は totally real isometric immersion である事が分かる。さて equivariant map について次の事が知られている。

Lemma 4.1 ([5]). $\rho: G \rightarrow \bar{G}$; Lie homom. で $\rho(G_0) \subset \bar{G}_0$, しかも induced equivariant map $f_\rho: M \rightarrow \mathcal{P}^n(\mathbb{C})$ が isometric immersion と仮定する。このとき、(a) $(\sigma_{f_\rho})_\Delta(X, Y) = ([d\rho(X)_{\bar{\mathcal{K}}}, d\rho(Y)_{\bar{\mathcal{P}}}]_{\bar{\mathcal{M}}})^\perp$, $X, Y \in \mathcal{P}$. ここで、 $\bar{\mathcal{M}}^\perp$ は $(d\rho)(\mathcal{P})$ の $\bar{\mathcal{P}}$ -projection によって得られる $\bar{\mathcal{P}}$ の subspace $\bar{\mathcal{M}}$ の $\bar{\mathcal{P}}$ での直交補空間とする。(b) f_ρ が parallel であるための必要十分条件は次で与えられる:

$$[dP(X)_{\mathbb{P}}, [dP(Y)_{\mathbb{P}}, dP(Z)_{\mathbb{P}}]] \in \bar{m}, [dP(X)_{\mathbb{R}}, [dP(X)_{\mathbb{R}}, dP(X)_{\mathbb{P}}]] \in \bar{m}$$

$$(X, Y, Z \in \mathcal{P}).$$

この Lemma によって我々の $f_{\sigma, \tilde{\sigma}}$ は parallel で $(\tilde{\sigma}_{f_{\sigma, \tilde{\sigma}}})_0 = \tilde{\sigma}$ である事が分かる。これは ι_M が onto であることを示す。

Remark. $f \in \mathcal{I}_M$ とする時、 $f(0) = \bar{0}$ とし、 $(f_*)_0 = \sigma$ とすれば $f_{(f_*)_0, (\tilde{\sigma}_f)_0} \in \mathcal{I}_M$ であって Lemma 3.1 によって $f = f_{(f_*)_0, (\tilde{\sigma}_f)_0}$ となる。これは f が G -equivariant map である事を示すから、 $f(M)$ は $\bar{0}$ の $P_{(f_*)_0, (\tilde{\sigma}_f)_0}(G)$ -orbit space である。ゆえに $f(M)$ は $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の submanifold である。

さらに $\mu_{(\tilde{\sigma}_f)_0, (f_*)_0}(X)(f_*(Y) + \zeta) = -f_*(A_{\zeta}(X)) + \sigma(X, Y)$ (ここで、 $X, Y \in \mathcal{P}$, $\zeta \in \bar{m}^+ = N_0(M)$, A_{ζ} は ζ 方向の shape operator とする) によって、実は与えられている。

§.5. M が Euclidean factor を持たない場合

最初に totally real parallel isometric immersions の例を与える。

Model. 1 $M^n = S^n(\frac{1}{4})$, $f: M^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$: standard totally geodesic immersion, ($n \geq 2$)

Model. 2 $M = SU(n)/SO(n)$ ($n \geq 3$), $V = S_n(\mathbb{C})$; n 次複素対称行列全体のなす complex vector space とし、 $P(V)$ を holomorphic sectional

curvature c の Kähler metric をもつ V 上の complex projective space, $\pi: V - \{0\} \rightarrow P(V)$ を standard projection とする。さらに $f: M \rightarrow P(V)$ を $f(g \cdot SO(n)) = \pi(*g \cdot g)$ として、 M に induced metric を入れる。

Model. 3 $M = SU(2n)/Sp(n)$ ($n \geq 3$). $V = \mathcal{O}(2n; \mathbb{C})$; $2n$ 次複素歪対称行列全体のなす complex vector space. $J_n = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$ とする。この時、 $f: M \rightarrow P(V)$ を $f(g \cdot Sp(n)) = \pi(*g \cdot J_n \cdot g)$ とする。

Model. 4 $M = SU(n) \times SU(n)/SU(n)$ ($n \geq 3$). $V = M_n(\mathbb{C})$; n 次複素行列全体のなす complex vector space. $f: M \rightarrow P(V)$ を $f((g, h) \cdot SU(n)) = \pi(g \cdot h^{-1})$ とする。

Model. 5 $M = E_6/F_4$. V : Cayley 数体上の 3 次 Hermitian symmetric matrices 全体のなす real vector space の複素化. E_3 を 3 次の単位行列 $\in V$ とする。この時、群 E_6 は V の正則変換として働き、 $f: M \rightarrow P(V)$ を $f(g \cdot F_4) = \pi(g(E_3))$ とする。

ここで上の models 2~5 が parallel totally real である事は O'Neill[9] や Nomizu[8] の Hopf fibering に関する理論を使って計算する。

Remark 上で与えられた isometric immersions は全て minimal である。

さて、単連結 symmetric space M を de Rham 分解した時、直積因子に Euclidean space が出てくるとき Euclidean factor を持たないということにする。この時、次の定理を得る。

定理 5.1 ([6]). M は Euclidean factor を持たないとする。この時、 $\pi_M \neq \emptyset$ ならば M は Riemannian manifold として models 1~5 の中のどれかになる。さらにこの時 $\pi_M = \{1\text{-point}\}$ で代表する isometric immersion は models で与えられた f になる。

証明 $\pi_M \neq \emptyset$ と仮定する。この時、 $P_{\delta, \tilde{\sigma}}(\mathcal{Q}) < \mathcal{Q}$ より \mathcal{Q} は compact type である。さらに M の既約分解を $M_1 \times \cdots \times M_r$ として、

$$\mathcal{K} = \sum_{i=1}^r \mathcal{K}_i, \quad P = \sum_{i=1}^r P_i, \quad \mathcal{Q} = \sum_{i=1}^r \mathcal{Q}_i$$

とすると $\tilde{\sigma}$ の (2) の条件は $\tilde{\sigma} = \sum_{i=1}^r \tilde{\sigma}_i$ ($\tilde{\sigma}_i$ は P_i 上の $\mathcal{K}_i \cdot \tilde{\sigma}_i \equiv 0$ となる 3 次の symmetric trilinear) となる。この事に注意すれば、 $\tilde{\sigma}$ の条件 (3) は M が irreducible で、さらに M 上の metric は一意である事を示す。さて、 M が irreducible, compact type の時、 $d_M = \dim_{\mathbb{R}} \{ \tilde{\sigma} \in S^3(P); \mathcal{K} \cdot \tilde{\sigma} \equiv 0 \}$ とする (ここで $S^3(*)$ は $*$ 上の 3 次の symmetric trilinear forms 全体)。ここで \mathcal{O} を P の maximal abelian, W を M に associate する Weyl 群とすれば、 $d_M = \dim \{ \tilde{\alpha} \in S^3(\mathcal{O}); W \cdot \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha} \}$ となり、右辺は Araki [1] と Bourbaki [2] によって次のように計算される:

M が models 2~5 の M の時 $d_M = 1$, その他の M の時 $d_M = 0$.

$d_M = 0$ の時、 $\tilde{\sigma} = 0$ となり、 $\tilde{\sigma}$ の条件 (3) によって $M = S^n(\mathbb{C}/4)$ で、明らかに $\pi_M = \{1\text{-point}\}$ である。 $d_M = 1$ の時、再び $\tilde{\sigma}$ の条件 (3) により π_M は符号の違いを入れて高々 2 つである。さらに 0 での M の involution は $S^3(P)$ 上 $-\text{id}$ として働くから、models 2~5 の存在によって $\pi_M = \{1\text{-point}\}$ となる。

Q.E.D

§.6. M が Euclidean factor を持つ場合とその応用

この章では M が Euclidean factor を持つ場合, i.e., M の既約分解が $M = R^{n_0} \times M_1^{n_1} \times \cdots \times M_r^{n_r}$ で与えられている時を考える。このとき,

$$k = \sum_{i=1}^r k_i, \quad p = p_0 + \sum_{i=1}^r p_i, \quad q = p_0 + \sum_{i=1}^r q_i$$

とほり, $\tilde{\sigma} \in \pi_M$ は $\tilde{\sigma} = \sum_{i,j,k=0}^r \tilde{\sigma}_{ij}^k$ (symbolical に) と表わす。ここで $\tilde{\sigma}_{ij}^k: P_i \times P_j \rightarrow P_k$ を $\tilde{\sigma}_{ij}^k(x_i, y_j) = \tilde{\sigma}(x_i, y_j)$ の P_k -成分によって定義する。さらに, $H_j = \frac{1}{n_j} \text{Tr} \tilde{\sigma}_{jj}^0 \in P_0$ とするとき, $\tilde{\sigma} \in \pi_M$ の条件を各 component ごとに書き直すことによって次の定理を得る。

定理 6.1 ([6]). (a) $\tilde{\sigma} \in \pi_M$ ならば,

(1) $\tilde{\sigma} = \sum_{j=0}^r \tilde{\sigma}_{jj}^j + \sum_{j=1}^r \tilde{\sigma}_{jj}^0 + \sum_{j=1}^r \tilde{\sigma}_{j0}^j + \sum_{j=1}^r \tilde{\sigma}_{0j}^j$, (2) $\tilde{\sigma}_{jj}^j \in \pi_{M_j}^{\frac{c}{4} + k_j^2}$ ($j \geq 1$); (ここで $k_j = |H_j|$ で $\pi_{M_j}^{\frac{c}{4} + k_j^2}$ は π_{M_j} の条件 (3) の $\frac{c}{4}$ を $\frac{c}{4} + k_j^2$ におきかえたものとする。) (3) $\tilde{\sigma}_{00}^0 \in \pi_{R^{n_0}}$, $\langle H_j, H_k \rangle = -\frac{c}{4}$ ($j \neq k$), $\tilde{\sigma}_{00}^0(Z_0, H_j) = \langle Z_0, H_j \rangle H_j - \frac{c}{4} Z_0$, (4) $\tilde{\sigma}_{jj}^0(x_j, y_j) = \langle x_j, y_j \rangle H_j$, $\tilde{\sigma}_{j0}^j(x_j, Z_0) = \tilde{\sigma}_{0j}^j(Z_0, x_j) = \langle Z_0, H_j \rangle x_j$; ($Z_0 \in P_0$, $x_j, y_j \in P_j$)).

(b) 逆に上の (1), (2), (3), (4) を満たす P 上の P -valued bilinear form は π_M の元になる。

Remark 上の定理の (a) の (2) によって $\pi_M \neq \emptyset$ ならば M の既約成分は §.5 の 'models' の M_i のどれかになる。その時 π_M は一般に infinite set である事も分かる。

最後に、証明は省略されるが、 $M = R^2$ の場合に次の定理を得る。

定理6.2 ([6]). $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の中に, holomorphic isometry の違いを除いて, unique な complete totally real parallel minimal flat surface が存在する。

Remark 上の model の concrete な形は [5] で述べられている。さらにその model は compact, $|\sigma| = \frac{c}{2}$, $\sqrt{c}/2\sqrt{2}$ -isotropic になっている。

Remark Yau [12] は ' $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の complete non-negative curved totally real minimal surface は totally geod. or flat であり、後者は parallel である, 事 を 示 した。上の定理の model は後者の唯一の例である。

さらに他の応用については [6] か [7] を参照せよ。

References

- [1] S.Araki : On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces, J. Math. Osaka City Univ, 13 (1962), 1-34.
- [2] N.Bourbaki : Elements de Mathematique Groupes et Algebres de Lie, Chap. 4-6, 1968.
- [3] D.Ferus : Immersions with parallel second fundamental form, Math. Z, 140(1974), 87-93.
- [4] H.Nakagawa and R.Takagi : On locally symmetric Kaehler submanifolds in a complex projective space, J. Math. Soc. Japan, 28(1976), 638-667.

- [5] H.Naitoh : Isotropic submanifolds with parallel second fundamental forms in $P^m(c)$, to appear.
- [6] ——— : Totally real parallel submanifolds in $P^n(c)$, to appear.
- [7] H.Naitoh and M.Takeuchi : Totally real submanifolds and symmetric bounded domains, to appear.
- [8] K.Nomizu : A characterization of the Veronese varieties, Nagoya Math. J, 60(1976), 181-188.
- [9] B.O'Neill : The fundamental equations of a submersion, Michigan Math. J, 13(1966), 459-469.
- [10] W. Strübing : Symmetric Submanifolds of Riemannian Manifolds, Math. Ann, 245(1979), 37-44.
- [11] M.Takeuchi : Parallel submanifolds of Space forms, to appear.
- [12] S.T.Yau : Submanifolds with constant mean curvature I, Amer. J. of Math, 96(1974), 346-366.